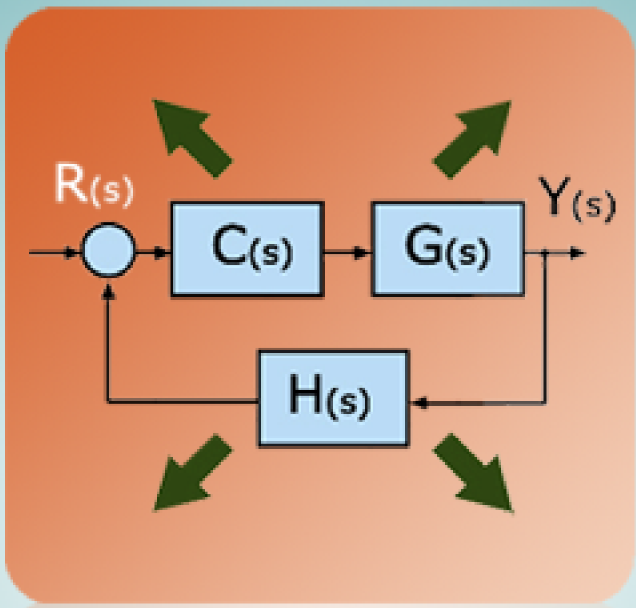
Automática

Ejercicios

Capítulo 5. Estabilidad



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

EJERCICIO 5.1.

Estudiar la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es la siguiente:

$$F(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240$$

- No falta ningún término.
- No existe ningún coeficiente negativo.

Tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 10 & 152 \\ s^4 & 1 & 72 & 240 \\ s^3 & -62 & -88 & 0 \\ s^2 & 70.6 & 240 & 0 \\ s & 122.6 & 0 & 0 \\ s^0 & 240 & 0 & 0 \end{array}$$

- 2 cambios de signo en 1ª columna:

2 raíces a la derecha → $\boxed{\text{Inestable.}}$

EJERCICIO 5.2.

Estudiar la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es la siguiente:

$$F(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

- No falta ningún término.
- No existe ningún coeficiente negativo.

Tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & 0 & 6 & \\ s^2 & & & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

-Cambio s=1/x:

$$F(s) = \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 11\left(\frac{1}{x}\right) + 10$$

$$F(x) = 10x^5 + 11x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$F(x) = 10x^5 + 11x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 10 & 4 & 2 \\
s^4 & 11 & 2 & 1 \\
s^3 & 2.18 & 1.1 & \\
s^2 & -3.55 & 1 & \\
s & 1.71 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}$$

2 cambios de signo:

2 raíces a la derecha → $\boxed{\text{Inestable.}}$

EJERCICIO 5.3.

Estudiar la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es la siguiente:

$$F(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 = 0$$

- No falta ningún término.
- No existe ningún coeficiente negativo.

Tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 11 & 18 \\
s^3 & 2 & 18 & \\
s^2 & 2 & 18 & \\
s & 0 & 0 & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

Ecuación auxiliar: $2s^2 + 10 = 0$
Derivando: $4s + 0 = 0$

$$\begin{array}{c|cc}
s & 4 & 0 \\
s^0 & 18 &
\end{array}$$

$\boxed{\text{Estable.}}$

EJERCICIO 5.4.

Calcular los valores de K y a que hacen estable al sistema definido por la siguiente función:

$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka}$$

Ecuación característica:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka = 0$$

Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & Ka \\ s^3 & 6 & K+6 & \\ s^2 & 10 - \dfrac{K}{6} & Ka & \\ s & k + 6 - \dfrac{6Ka}{10 - K/6} & & \\ s^0 & Ka & & \end{array}$$

K y a deben tener igual signo.

$$10 - \frac{K}{6} = 0 \rightarrow k < 60$$

$$K + 6 - \frac{6Ka}{10 - K/6} = 0 \rightarrow (K = 40) \rightarrow \quad \boxed{a \leq 0.63}$$

EJERCICIO 5.5.

Comprobar mediante Routh, para el sistema cuya ecuación característica es la siguiente, que no tiene polos a la derecha del punto -1.

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

Cambio z=s+1:

$$(z-1)^3 + 4(z-1)^2 + 6(z-1) + 4 = 0$$

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Routh:

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 1 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{array}$$

Ec. Auxiliar: $z^2 + 1 = 0 \rightarrow 2z + 0 = 0$

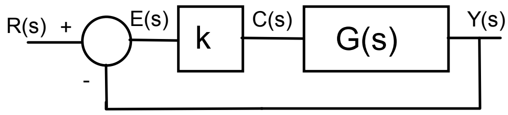
$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 1 & 1 \\ z & 2 & \\ z^0 & 1 & \end{array}$$

No tiene polos a la derecha de –1.

$\boxed{\text{Estable.}}$

EJERCICIO 5.6.

Tenemos un sistema de control dado por la siguiente estructura:



Donde:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + s^2 + 2s + 3}$$

Calcular los valores de K que son límites de estabilidad del sistema.

La función de transferencia del sistema completo es:

$$M(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)}$$

La ecuación característica del sistema corresponde con el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$1 + K \cdot G(s) = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + s^2 + 2s + 3} = 0$$

$$s^3 + s^2 + 2s + 3 + K \cdot (s^2 + 2s + 4) = 0$$

$$s^3 + (K + 1)s^2 + (2 + 2K)s + 3 + 4K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2+2K \\ s^2 & 1+K & 3+4K \\ s^1 & \dfrac{2K^2 - 1}{K + 1} & \\ s^0 & 3+4K & \end{array}$$

Condiciones:

1) $1+K \geq 0 K \geq -1$

2) $3+4K \geq 0 K \geq -\frac{3}{4} K \geq -0.75$

3) $\frac{2K^2-1}{K+1} \geq 0 2K^2-1 \geq 0 K \geq \pm\sqrt{\frac{1}{2}} K \geq \pm 0.707$

Luego los valores de K serán:

$$\boxed{\begin{array}{c} -0.75 \geq K \geq -0.707 \\ K \geq 0.707 \end{array}}$$

EJERCICIO 5.7.

Calcular el rango de valores de K de un sistema con realimentación unitaria y con la función de transferencia de lazo directo que se muestra, para que el sistema sea estable.

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}$$

La ecuación característica será:

$$1+G(s)=0$$

$$1+\frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}=0$$

$$s(4s+1)(s+1)^2+K(2s+1)=0$$

$$4s^2+9s^3+6s^2+(2K+1)s+K=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 4 & 6 & K \\
s^3 & 9 & 2K+1 & \\
s^2 & \frac{50-8K}{9} & K & \\
s^1 & \frac{-16K^2+11K+50}{50-8K} & & \\
s^0 & K & &
\end{array}$$

1) $K > 0$

2) $2K + 1 > 0 \quad K > -0.5$

3) $50 - 8K \geq 0 \quad K \leq 6.25$

4) $-16K^2 + 11K + 50 \geq 0 \qquad -1.45 \leq K \leq 2.14$

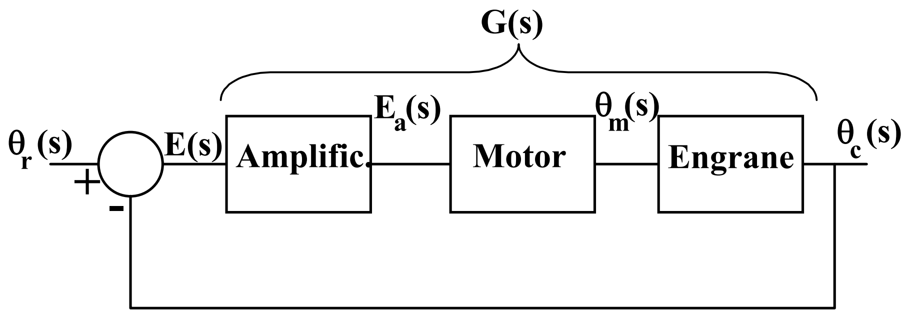
Luego el rango de valores de K que cumple todas las condiciones anteriores es:

$$\boxed{0 < K < 2.4}$$

EJERCICIO 5.8.

Para el sistema del ejercicio 1.9. calcular la estabilidad del sistema de lazo cerrado.
Calcular el rango de valores posibles para una ganancia K que se añade en la cadena directa tal que el lazo cerrado siga siendo estable.

En el ejercicio 1.9. se llegó a que el diagrama de bloques del sistema era:



Y la función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$

Y la función de transferencia de lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{50000}{s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 50000}$$

Se puede saber que el sistema es estable comprobando que todos sus polos están a la izquierda del plano complejo, se va a aplicar la técnica de Routh para comprobarlo.

Ecuación característica del sistema:

$$s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 50000 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1725 \\ s^2 & 50.5 & 50000 \\ s & 734.9 & 0 \\ s^0 & 50000 & \end{array}$$

Podemos comprobar que no se produce ningún cambio de signo en la primera columna, luego no existe ningún polo en el semiplano derecho. Por lo tanto el sistema es estable.

Para calcular el rango de la ganancia K a añadir se tiene una nueva ecuación característica del sistema:

$$s^3 + 50.5s^2 + 1725s + 50000K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1725 \\ s^2 & 50.5 & 50000K \\ s & 1725 - 990.1K & 0 \\ s^0 & 50000K & \end{array}$$

De la ecuación en s^0 obtenemos la primera condición: $K > 0$

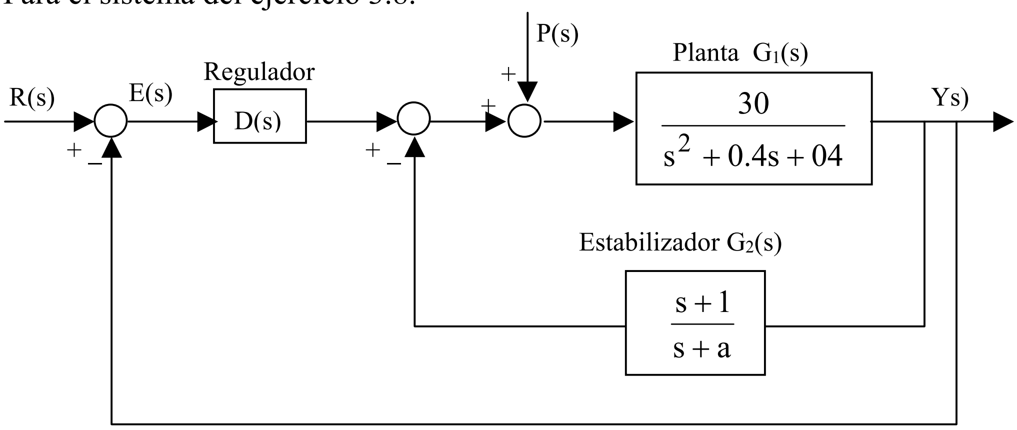
Y de la ecuación en s obtenemos el límite alto: $1725 - 990.1K = 0 \rightarrow K = 17.4$

Luego los valores de ganancia que hacen estable al sistema están en el intervalo:

$$\boxed{0 < K < 17.4}$$

EJERCICIO 5.9.

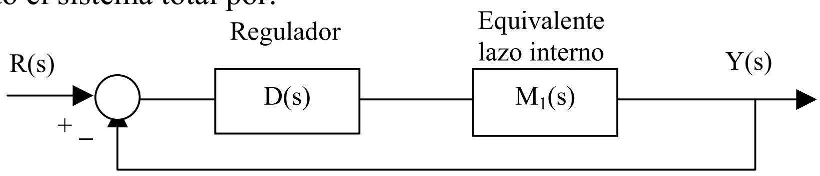
Para el sistema del ejercicio 3.8.



Considerando D(s) = 1, calcular el rango de valores del polo del estabilizador 'a' para los que el sistema total es estable.

Considerando en primer lugar como entrada R(s) y como salida Y(s).

Representando el sistema total por:



El lazo interno sería:

$$M_1(s) = \frac{\dfrac{30}{s^2+0.4s+0.4}}{1+\dfrac{30}{s^2+0.4s+0.4}\cdot\dfrac{(s+1)}{(s+a)}} = \frac{\dfrac{30}{s^2+0.4s+0.4}}{\dfrac{(s+a)(s^2+0.4s+0.4)+30(s+1)}{(s^2+0.4s+0.4)(s+a)}} =$$

$$= \frac{30(s+a)}{s^3+0.4s^2+0.4s+as^2+0.4as+0.4a+30s+30} = \frac{30(s+a)}{s^3+(0.4+a)s^2+(30.4+0.4a)s+(0.4a+30)}$$

Y la ecuación característica del sistema completo:

$$1+\frac{30(s+a)}{s^3+(0.4+a)s^2+(30.4+0.4a)s+(0.4a+30)} = 0$$

$$s^3+(0.4+a)s^2+(30.4+0.4a)s+0.4a+30+30s+30a = 0$$

$$s^3+(0.4+a)s^2+(60.4+0.4a)s+30+30.4a = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 60.4+0.4a \\
s^2 & 0.4+a & 30+30.4a \\
s^1 & \dfrac{(0.4+a)(60.4+0.4a)-(30+30.4a)}{0.4+a} & \\
s^0 & 30+30.4a &
\end{array}$$

Todos los coeficientes de la ecuación característica deben ser del mismo signo para que el sistema sea estable:

$$0.4+a>0 \qquad a>-0.4$$

$$60.4+0.4a>0 \qquad a>-151$$

$$30+30.4a>0 \qquad a>-0.9868$$

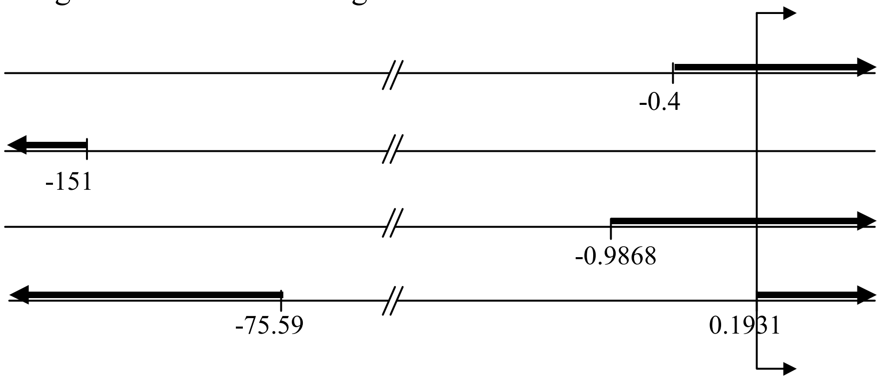
No deben existir cambios de signo en la primera columna para que sea estable:

$$(0.4+a)(60.4+0.4a)-(30+30.4a)>0 \qquad 24.16+0.16a+60.4a+0.4a^2-30-30.4a>0$$

$$0.4a^2+30.16a-5.84>0 \qquad a^2+75.4a-14.6>0$$

$$\begin{cases} a < -75{,}59 \\ a > 0.1931 \end{cases}$$

Representando gráficamente estas desigualdades se tiene:



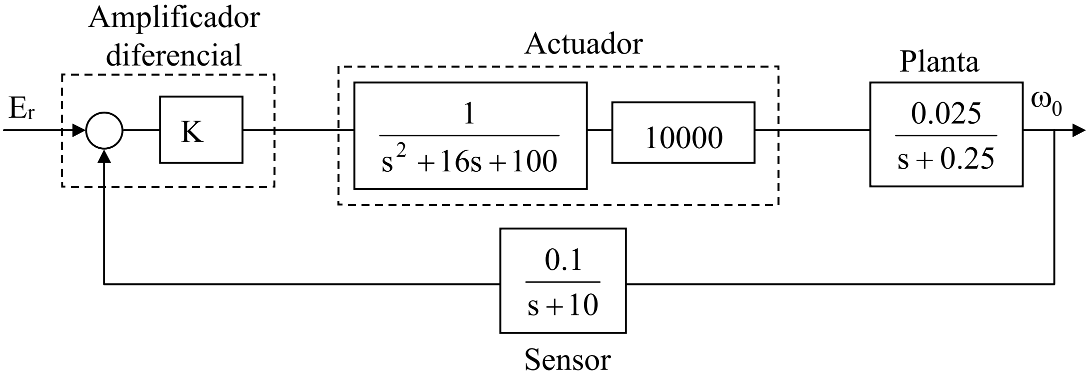
Puede observarse que el rango de k que cumple todas las condiciones es:

$$\boxed{k > 0.1931}$$

Si se considera ahora el sistema viendo como entrada Td(s) y como salida Y(s) se obtiene la misma función de transferencia y por tanto las mismas condiciones para la estabilidad.

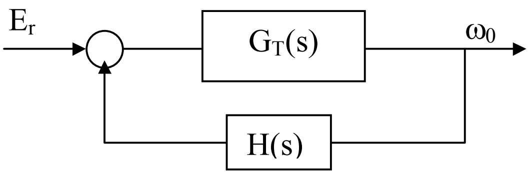
EJERCICIO 5.10.

Para el sistema del ejercicio 4.13. calcular el rango de valores de K (ganancia del amplificador) que hacen estable al sistema.



$$G_T(s) = K \cdot \frac{1}{s^2+16s+100} \cdot 1000 \cdot \frac{0.025}{s+0.25} = \frac{250K}{(s^2+16s+100)(s+0.25)}$$

$$H(s) = \frac{0.1}{s+10}$$



Se construye la tabla de Routh:

s^4	1	266.5	250+25K
s^3	26.25	1065	
s^2	225.9	250+25K	
s^1	A		
s^0	250+25K		

$$A = 1065 - \frac{26.25(250 + 25K)}{225.9} = 1035.95 - 2.91K$$

250+25K=0 K=-10

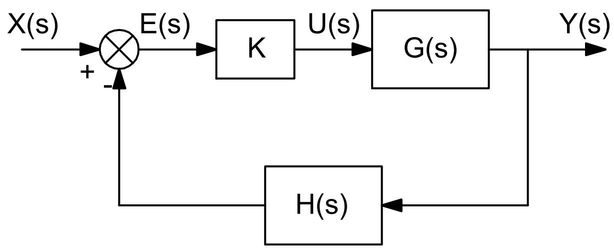
1035.95-2.9K=0 K=356

luego

$$\boxed{-10 \leq K \leq 356}$$

EJERCICIO 5.11.

Para el sistema control cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura determinar el rango de ganancias K para los que es estable.



$$G(s) = \frac{3(s + 0.66)}{s^2 + 4s + 5}$$

$$H(s) = \frac{10}{(2s + 8)(s + 6)}$$

Ecuación característica: $1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$

$$1 + K \cdot \frac{3s + 2}{s^2 + 4s + 5} \cdot \frac{5}{(s + 4)(s + 6)} = 0$$

$$(s^2 + 4s + 5)(s + 4)(s + 6) + 5K(3s + 2) = 0$$

$$s^4 + 14s^3 + 69s^2 + 146s + 120 + 5K(3s + 2) = 0$$

$$s^4 + 14s^3 + 69s^2 + (15K + 146)s + 120 + 10K = 0$$

s^4	1	69	120+10K
s^3	14	15K+146	
s^2	A	120+10K	
s^1	B		
s^0	120+10K		

$$A = \frac{14 \cdot 69 - 15K - 146}{14} = \frac{820 - 15K}{14}$$

$$B = \frac{A(15K + 146) - 14(120 + 10K)}{A} = 15K + 146 - \frac{196(120 + 10K)}{820 - 15K} = 15K + 146 - \frac{23520 + 1960K}{820 - 15K}$$

Condiciones:

a) $120 + 10K \geq 0$ $\quad$ $K \geq -12$

b) $\dfrac{820 - 15K}{14} \geq 0$ $\quad$ $K \leq 54.66$

c) $15K + 146 - \dfrac{23520 + 1960K}{820 - 15K} \geq 0$ $\quad$ $\dfrac{-225K^2 + 10110K + 119720 - 23520 - 1960K}{820 - 15K} \geq 0$

$$\frac{-225K^2 + 8150K + 96200}{820 - 15K} \geq 0$$

$$K = \infty$$

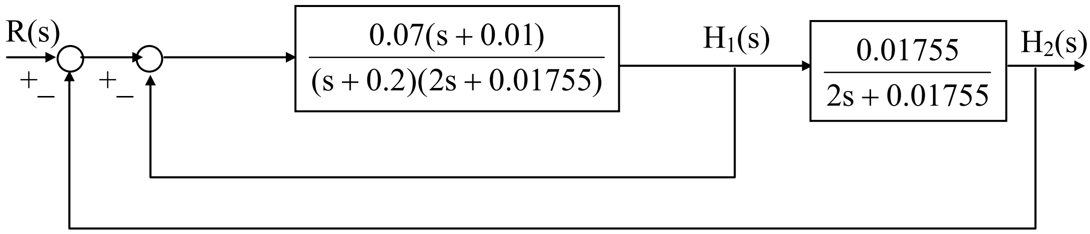
$$-225K^2 + 8150K + 96200 \geq 0 \quad \begin{cases} K \leq 45.6 \\ K \geq -9.37 \end{cases}$$

Entonces los valores de ganancia que permiten funcionar al sistema de una forma estable son:

$$\boxed{-9.37 \leq K \leq 45.6}$$

EJERCICIO 5.12.

Para el sistema del ejercicio 1.16. cuyo diagrama de bloques se presenta a continuación, analizar la estabilidad.



Resolviendo el lazo interno se tiene:

$$M_1(s) = \frac{\dfrac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}}{1+\dfrac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)}} = \frac{0.07(s+0.01)}{(s+0.2)(2s+0.01755)+0.07(s+0.01)}$$

$$M_1(s) = \frac{0.07(s+0.01)}{2s^2+0.48755s+0.00421}$$

Y cerrando el lazo exterior:

$$M_2(s) = \frac{\dfrac{0.07(s+0.01)}{2s^2+0.48755s+0.00421}\cdot\dfrac{0.01755}{2s+0.01755}}{1+\dfrac{0.07(s+0.01)}{2s^2+0.48755s+0.00421}\cdot\dfrac{0.01755}{2s+0.01755}}$$

$$M_2(s) = \frac{0.07(s+0.01)(2s+0.01755)}{(2s^2+0.48755s+0.00421)(2s+0.01755)+0.07(s+0.01)\cdot 0.01755}$$

$$M_2(s) = \frac{0.07(s+0.01)(2s+0.01755)}{4s^3+1.0102s^2+0.018205s+0.000086}$$

Cuyos polos se encuentran en:

$$s_{1,2} = -0.0096 \pm j0.001$$

$$s_3 = -0.233$$

Como todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo el sistema es estable.

Puede verse también la estabilidad mediante la tabla de Routh:

s^3	4	0.018205
s^4	1.0102	0.000086
s^1	0.01786	
s^0	0.000086	

Como no se produce ningún cambio de signo en la primera columna el sistema es estable.